Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Xã hội và Nhân văn
ISSN 2588-1213
Tập 132, Số 6A, 2023, *Tr. 139–154*; **DOI:** 10.26459/hueunijssh.v132i6A.6714

GIAO TIẾP TOÁN HỌC CỦA SINH VIÊN TRONG GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ VỀ GIỚI HẠN Ở ĐẦU ĐẠI HỌC

Nguyễn Đức Hồng[1,2]

1Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 34 Lê Lợi, Huế, Việt Nam

2Trường Đại học Nông Lâm, Đại học Huế, 102 Phùng Hưng, Huế, Việt Nam

Tác giả liên hệ: **Nguyễn Đức Hồng** < nguyenduchong@huaf.edu.vn>

(Ngày nhận bài: 24-02-2022; Ngày chấp nhận đăng: 03-08-2022)

Tóm tắt: Nghiên cứu này hướng đến việc phân tích giao tiếp toán học của sinh viên trong giải quyết vấn đề về giới hạn hàm số ở đầu đại học. Chúng tôi sử dụng lý thuyết giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) như một khung lý thuyết tham chiếu để thiết kế công cụ nghiên cứu và đặc trưng diễn ngôn toán học của sinh viên về giới hạn hàm số bằng cách phân tích cách sử dụng từ ngữ, phương tiện hỗ trợ trực quan, thủ tục, và tường thuật xác nhận của họ. Đối tượng khảo sát là 8 sinh viên năm thứ nhất và thứ hai đang học tại các trường đại học khác nhau ở Việt Nam. Nghiên cứu gợi ý rằng việc dạy học giới hạn hàm số ở đầu đại học cần chú ý đến việc làm sáng tỏ nghĩa được gắn kết bên trong các biểu tượng toán học để nâng cao giao tiếp toán học của sinh viên.

Từ khóa: Tiếp cận giao tiếp – nhận thức, giới hạn, giao tiếp toán học, giáo dục toán học.

STUDENTS' MATHEMATICAL COMMUNICATION IN SOLVING LIMIT PROBLEMS

Nguyen Duc Hong[1,2]

[1]University of Educations, Hue University, 34 Le Loi St., Hue, Vietnam

[2]University of Agrycuture and Forestry, Hue University, 102 Phung Hung St., Hue, Vietnam

* Correspondence to **Nguyen Duc Hong** < nguyenduchong@huaf.edu.vn>

(*Received: February 24, 2022; Accepted: August 03, 2022*)

Abstract: This study aims to analyze students' mathematical communication in solving problems about limits at the beginning of university. We use the theory of commognition (Sfard, 2008) as a theoretical framework to design research tools and characterize students' mathematical discourse on limits of functions by analyzing their word use, visual mediators, routines and endorsed narratives. Participants of this study are eight first and second-year students studying at different universities in Vietnam. The findings suggest that the teaching of limits of functions at university level in Vietnam should take into account the unpacking of the meanings inherent in mathematical symbols to enhance students' mathematical communication.

Keywords: Approach to communication – perception, limits, mathematical communication, mathematics education.

1. Mở đầu

Ngày nay, giao tiếp trong lớp học và hoạt động diễn ngôn (discourse) là những vấn đề trọng tâm trong các nghiên cứu giáo dục (Tabach & Nachlieli, 2016). Một số lý thuyết trong nghiên cứu giáo dục quan niệm rằng tư duy được thể hiện qua giao tiếp, một số lý thuyết khác cho rằng tư duy chính là một dạng tương đương của giao tiếp. Sfard (2008) xem tư duy như là giao tiếp với chính bản thân mình. Để nhấn mạnh tính thống nhất của giao tiếp và tư duy, Sfard sử dụng thuật ngữ giao tiếp-nhận thức (commognition), như là một sự kết hợp giữa giao tiếp (communication) và nhận thức (cognition). Trong công trình *"Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing"*, Sfard (2008) đề xuất và phát triển một cách tiếp cận diễn ngôn (discursive approach), gọi là tiếp cận giao tiếp – nhận thức (commognitive approach).

Vận dụng các tiếp cận giao tiếp vào nghiên cứu giáo dục toán học là một hướng nghiên cứu khá mới mẻ và gần đây được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Nhiều nghiên cứu sử dụng tiếp cận giao tiếp-nhận thức của Sfard (2008) để nghiên cứu việc dạy học toán, đặc biệt là dạy học các yếu tố của giải tích toán học (Nardi et al. 2014; Guçler, 2013, 2016; Park, 2015, 2016). Điều này cho thấy tiềm năng của các tiếp cận giao tiếp trong việc phân tích thực hành dạy học toán. Tuy nhiên, bước chuyển phổ thông – đại học đặt ra nhiều khó khăn cho người học, đặc biệt là khi người học tiếp cận các khái niệm của toán học nói chung và giải tích toán học nói riêng, bởi vì người học phải chuyển từ toán học mang tính tính toán, trực quan sang kiểu toán học chặt chẽ, hình thức hóa, khái quát hóa ở mức cao hơn, nhiều kiểu biểu đạt hơn. Theo tiếp cận giao tiếp-nhận thức của Sfard (2008), bước chuyển phổ thông - đại học đòi hỏi những thay đổi trong diễn ngôn toán học của người học và người dạy cho phù hợp với đòi hỏi của thể chế dạy học mới. Sử dụng tiếp cận giao tiếp-nhận thức để phân tích việc dạy học các yếu tố của giải tích ở bước chuyển này là vấn đề thú vị và còn ít tác giả quan tâm, đặc biệt trong ngữ cảnh dạy học toán ở Việt Nam.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi tập trung phân tích đặc trưng giao tiếp toán học của sinh viên trong quá trình giải quyết vấn đề cộng tác liên quan đến chủ đề giới hạn hàm số. Dựa trên lý thuyết giao tiếp-nhận thức của Sfard (2008), chúng tôi sẽ làm rõ khả năng giao tiếp toán học của sinh viên thông qua phân tích đặc điểm diễn ngôn toán học của họ liên quan đến việc giải quyết các bài toán về giới hạn hàm số.

2. Khung lý thuyết tham chiếu

2.1. Tiếp cận giao tiếp - nhận thức

Đối với các quan niệm kiến tạo cơ bản, việc học được xem như quá trình tiếp thu (learning as acquisition), trong đó nhấn mạnh bản chất cá nhân của việc học, xem đó là quá trình tiếp thu các dạng thức trí tuệ. Ngược lại, tiếp cận giao tiếp – nhận thức xem việc học như là quá trình tham gia (learning as participation). Trong quan niệm này, việc học được xem như sự thay đổi trong diễn ngôn của cá nhân (tức là trong cách cá nhân giao tiếp) qua việc tham gia vào một cộng đồng thực hành (Lave & Wenger, 1991). Việc học là quá trình qua đó học sinh trở thành những người tham gia chủ đạo hơn trong hoạt động diễn ngôn. Giả thuyết cơ bản của tiếp cận giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) cho rằng *"Học toán là sự khởi xướng với các diễn ngôn toán học liên quan đến những thay đổi nghị luận trọng yếu đối với người học, và dạy toán cần phải hướng đến thúc đẩy những thay đổi đó"* (Sfard, 2008, tr. 133-134). Giao tiếp qua ngôn ngữ nói hoặc viết, và việc thao tác trên các đối tượng vật lý là những phương tiện chủ yếu đi đến mục đích nghị luận của việc dạy và học.

Trong tiếp cận giao tiếp – nhận thức đối với việc học của Sfard (2008), đơn vị phân tích chủ đạo là diễn ngôn. Diễn ngôn được định nghĩa như là "các dạng khác nhau của giao tiếp được đặc trưng bởi đối tượng của nó, kiểu phương tiện trung gian được sử dụng, những quy tắc được sử dụng bởi những người tham gia, và vì vậy xác định nên những cộng đồng giao tiếp khác nhau" (Sfard, 2008, tr. 93). Từ cách nhìn này, toán học được xem là một dạng diễn ngôn đặc thù, được phân biệt bởi bốn đặc trưng sau:

• *Cách sử dụng từ ngữ* (Word use): Đề cập đến việc sử dụng từ vựng toán học trong diễn ngôn của người tham gia. Nó bao gồm việc sử dụng các thuật ngữ toán học (chẳng hạn như tôpô), cũng như các từ ngữ thông thường với một nghĩa đặc thù trong toán học (như là "giới hạn", "liên tục", "mở"). Một đặc trưng quan trọng trong việc sử dụng từ ngữ trong diễn ngôn toán học là *đối tượng hóa* (objectification), xuất hiện qua *quá trình cô đọng* (reification), tức quá trình thay thế các ngôn từ nói về hành động và quá trình hình thành các ngôn từ liên quan đến đối tượng toán học. Qua đối tượng hóa, chúng ta nhận ra tính tương đồng giữa những quá trình khác nhau trong một ngôn từ và thống nhất một tên gọi cho đối tượng toán học đó.

• *Các phương tiện trung gian trực quan* (Visual mediators): Đề cập đến tất cả các đối tượng trực quan được tạo ra và sử dụng cho việc giao tiếp toán học. Nó bao gồm các đối tượng cụ thể (đồ thị, sơ đồ, đối tượng vật lý) hay những biểu tượng hình thức, ví dụ như hệ thống ký hiệu toán học. Chẳng hạn, phương tiện trung gian trực quan của đạo hàm của một hàm số có thể là biểu thức $f'(x) = 2x+1$ hoặc một đồ thị trong mặt phẳng tọa độ.

• *Thủ tục* (Routines): Thủ tục (hay thói quen) là tập hợp các quy tắc tổng hợp mô tả các quy luật diễn ngôn trong hành động của người tham gia giao tiếp khi họ thực hiện các tường thuật về toán học. Thủ tục bao gồm các thực hành có tính lặp lại, được sử dụng theo những cách đặc thù bởi cộng đồng (chẳng hạn như định nghĩa, đặt giả thuyết, chứng minh, ước lượng, khái quát hóa, trừu tượng hóa). Sfard phân chia thành ba loại thủ tục: hành vi (deeds), nghi thức (rituals) và khám phá (explorations).

• *Thuyết minh xác nhận* (Endorsed narratives): Thuyết minh (hay tường thuật) xác nhận đề cập đến dãy các lời văn (utterances) về các đối tượng toán học và mối quan hệ của chúng mà người tham gia giao tiếp xem như là đúng. Các định nghĩa, định lý, tiên đề là những thuyết minh xác nhận của diễn ngôn toán học.

Trong tiếp cận giao tiếp – nhận thức này, *việc học được xem như một sự thay đổi trong diễn ngôn của người học*, tức là thay đổi ở một trong bốn đặc trưng của diễn ngôn: sử dụng từ ngữ, các phương tiện trung gian trực quan, thủ tục, và thuyết minh xác nhận.

2.2. Đối tượng toán học và sự thể hiện

Tiếp cận giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) quan niệm rằng các đối tượng toán học được kiến tạo theo cách nghị luận (thông qua giao tiếp). Lưu ý rằng không phải tất cả *đối tượng* trong diễn ngôn của người học đều là *đối tượng toán học* theo nghĩa của tiếp cận giao tiếp – nhận thức. Một đặc trưng chủ yếu của khái niệm *đối tượng toán học* theo Sfard (2008) là mối quan hệ giữa cái biểu đạt (signifier) và sự thể hiện (realisation) của nó. Sfard gợi ý rằng, chẳng hạn khi giải một phương trình tuyến tính bằng phương pháp đại số, người học sẽ thực hiện từ cái biểu đạt (dưới dạng biểu tượng hay từ ngữ). Mỗi cái biểu đạt mang một nghĩa cụ thể nào đó đối với người học. Nghĩa đó tạo ra câu trả lời (dạng viết hoặc nói), gọi là *sự thể hiện*. Vì vậy, một cái biểu đạt hỗ trợ trung gian về nghĩa giữa một thực thể và một thực thể khác. Chuỗi những cái biểu đạt và sự thể hiện chúng được xem như các nhánh của một cây (cây thể hiện), và sự thể hiện cuối cùng là lời giải của bài toán.

2.3. Tiếp cận giao tiếp-nhận thức trong nghiên cứu giáo dục toán học

Các tiếp cận giao tiếp trong nghiên cứu giáo dục toán gần đây được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Cụ thể, tiếp cận giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) là khung lý thuyết tham chiếu chủ đạo của các công trình nghiên cứu được xuất bản trong một số đặc biệt năm 2016 của Tạp chí “Educational Studies in Mathematics” (Tabach & Nachieli, 2016). Guçler (2013) sử dụng tiếp cận giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) để phân tích diễn ngôn của giảng viên và sinh viên về giới hạn trong bài học giải tích ở đầu đại học. Nardi và cộng sự (2014) vận dụng tiếp cận giao tiếp – nhận thức để phân tích các thay đổi về diễn ngôn của giảng viên và sinh viên khi học một số khái niệm của giải tích ở đại học.

Trong một nghiên cứu của mình, Park (2016) sử dụng tiếp cận giao tiếp – nhận thức của Sfard để nghiên cứu so sánh diễn ngôn trong các sách giáo khoa ở Hoa Kỳ về đạo hàm tại một điểm và hàm đạo hàm. Các nhà nghiên cứu cho rằng bước chuyển thể chế từ dạy học toán ở phổ thông lên dạy học toán ở đại học đòi hỏi những thay đổi về những diễn ngôn trọng yếu. Dựa trên giả thuyết này, Stadler (2011) sử dụng khái niệm tiếp tuyến để nghiên cứu tương tác giữa giáo viên và học sinh ở bước chuyển dạy học phổ thông – đại học. Nghiên cứu tập trung vào sự khác nhau giữa diễn ngôn toán học ở phổ thông và diễn ngôn toán học ở đầu đại học, từ đó phân tích những khó khăn của học sinh trong việc thiết lập kết nối giữa chúng. Ở Việt Nam, tác giả Hồ Hữu Nghĩa (2021) đã bước đầu phân tích đặc trưng giao tiếp toán học của học sinh trung học phổ thông trong giải quyết vấn đề về đạo hàm. Nghiên cứu cho thấy tiềm năng của tiếp cận giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) như là một khung lý thuyết cho phép hiểu rõ hơn những đặc trưng của giao tiếp toán học của học sinh.

3. Phương pháp

3.1. Ngữ cảnh và tổ chức thực nghiệm

Thực nghiệm đã được tiến hành khảo sát trên 8 sinh viên năm thứ nhất và thứ hai đang học tại các trường đại học khác nhau. Các sinh viên này đã được học đầy đủ về giới hạn và đồ thị hàm số trong học kỳ đầu tiên của chương trình.

Chúng tôi sử dụng phương pháp giải quyết vấn đề cộng tác theo nhóm nhỏ để tổ chức cho sinh viên làm việc. Cụ thể, sinh viên được phân chia thành các nhóm nhỏ (mỗi nhóm từ 2 đến 3 sinh viên), cùng thảo luận, tranh luận để giải quyết các bài toán được đưa ra trong một phiếu học tập được chúng tôi thiết kế.

3.2. Công cụ nghiên cứu

Trong nghiên cứu này, công cụ nghiên cứu chủ yếu là một phiếu học tập, bao gồm 2 bài toán, mỗi bài toán gồm 2 câu hỏi về giới hạn của hàm số, dãy số đồng thời liên hệ giữa đồ thị hàm số và hạn của hàm số. Nội dung của các bài toán tập trung khai thác các khía cạnh sau đây:

- Giải thích cách hiểu về giới hạn của hàm số tại một điểm bằng lời, bằng minh họa hình học, bằng ký hiệu toán học.
- Giải thích cách hiểu về giới hạn vô cùng của hàm số tại một điểm bằng lời, bằng minh họa hình học, bằng ký hiệu toán học
- Mô tả (bằng lời và bằng đồ thị) dáng điệu của đồ thị hàm số f(x) khi x càng dần đến 0.

Dựa trên tiếp cận giao tiếp – nhận thức, chúng tôi thiết kế các nhiệm vụ toán trong phiếu học tập theo hướng thúc đẩy giao tiếp toán học của sinh viên bằng cách tập trung yêu cầu sinh viên giải thích, biện minh kết quả thông qua thảo luận nhóm nhỏ.

4. Kết quả

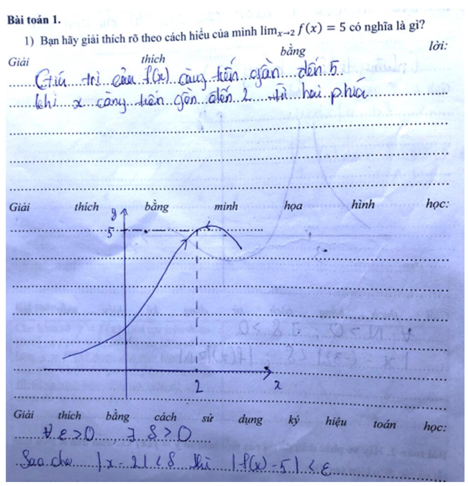
4.1. Đặc trưng diễn ngôn toán học của sinh viên

Nhóm 1 thực nghiệm gồm 2 sinh viên: NVĐ, TVT. Chúng tôi phân tích đặc trưng diễn ngôn của nhóm sinh viên này qua bài toán 1 dưới đây:

Bài toán 1.

1) *Bạn hãy giải thích rõ theo cách hiểu của mình* $lim_{x \to 2} f(x) = 5$ *có nghĩa là gì?*

Phần bài làm của sinh viên:



Phần thảo luận của sinh viên:

SV_NVĐ: Theo mình thì $\boldsymbol{x}$ càng tiến gần đến $\mathbf{2}$ thì $\boldsymbol{f(x)}$ càng tiến gần đến $\mathbf{5}$.

SV_TVT: Khi $\boldsymbol{x}$ dần đến $\mathbf{2}$ có thể khi thì $\boldsymbol{x}$ có thể dần về hai hướng khác nhau là $\mathbf{2^-}$ hoặc $\mathbf{2^+}$. Nếu hàm này không liên tục tại $\boldsymbol{x = 2}$ thì hai giới hạn này như thế nào?

SV_NVĐ: Mình nghĩ không nhất thiết phải liên tục tại điểm $\boldsymbol{x = 2}$. Bạn nghĩ sao?

SV_TVT: Ý mình là các giới hạn một phía đó có bằng nhau không?

SV_NVĐ: Giới hạn một phía đó khác nhau thì giới hạn đó sẽ không tồn tại.

Giảng viên: Hàm số $\boldsymbol{f(x)}$ không cần xác định tại $\boldsymbol{x = 2}$.

Giảng viên: Giải thích bằng hình học, để đơn giản chúng ta có thể minh họa bằng đường thẳng không nhất thiết là đường cong.

SV_TVT: Vì trong đề không cho hàm số cụ thể nên ta có thể vẽ minh họa đồ thị như vậy đi qua điểm $(\mathbf{5};\mathbf{2})$.

Giảng viên: Các bạn có thể giải thích bằng ký hiệu không?

SV_NVĐ: Với mỗi số $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ bé tùy ý, tồn tại $\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ sao cho $|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| < \boldsymbol{\delta}$ thì $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{5}| < \boldsymbol{\varepsilon}$

SV_TVT: Có thể giải thích bằng ký hiệu đơn giản hơn là khi khi $\boldsymbol{x} \to \mathbf{2}$ thì $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \mathbf{5}$

Giảng viên: Ký hiệu $|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| < \boldsymbol{\delta}$ có cần phải viết 0< $|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| < \boldsymbol{\delta}$ không?

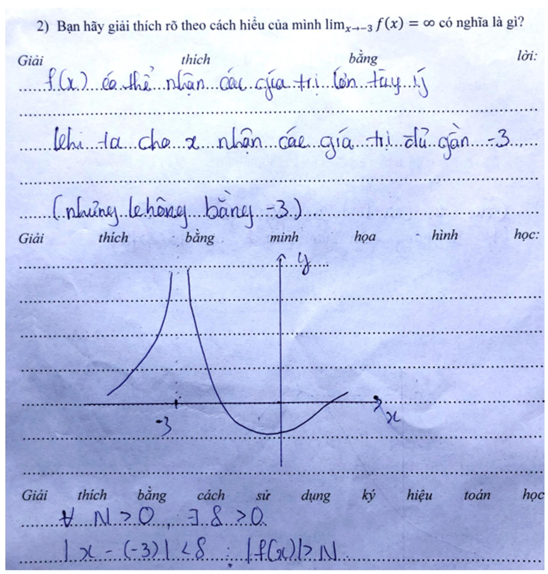
SV_NVĐ: Có

Giảng viên: Nếu 0< $|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| < \boldsymbol{\delta}$ thì nghĩa là $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{2}$.

SV_NVĐ: Có thể xác định tại $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ hoặc không.

2) Bạn hãy giải thích rõ theo cách hiểu của mình $lim_{x\to -3} f(x) = \infty$ có nghĩa là gì?

Phần bài làm của sinh viên:



Phần thảo luận của sinh viên:

SV_NVĐ: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ nhận giá trị lớn tùy ý khi ta cho $\boldsymbol{x}$ nhận giá trị đủ gần $-\mathbf{3}$.

SV_TVT: Mình cũng nghĩ vậy.

SV_NVĐ: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ có thể lớn tùy ý khi $\boldsymbol{x}$ tiến đến $-\mathbf{3}$, nếu $\boldsymbol{x} = -\mathbf{3}$ thì $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ không xác định.

SV_TVT: Khi khi $\boldsymbol{x}$ gần $-\mathbf{3}$ thì giá trị của $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ rất lớn.

Giảng viên: Các bạn có thể giải thích theo một cách trực quan không?

SV_NVĐ: Hàm số không xác định tại $\boldsymbol{x = -3}$ nên có thể vẽ đồ thị nhận $\boldsymbol{x = -3}$ làm tiệm cận đứng.

SV_TVT: Khi $\boldsymbol{x}$ gần $\boldsymbol{-3}$ thì độ dốc của đồ thị càng lớn

SV_NVĐ: Ta thấy đồ thị này không liên tục tại $\boldsymbol{x = -3}$, ta vẽ đồ thị gồm 2 nhánh nhận $\boldsymbol{x = -3}$ làm tiệm cận đứng.

SV_NVĐ: Ta có thể giải thích bằng ký hiệu. Với mọi $\boldsymbol{N}$ dương tồn tại $\boldsymbol{\delta > 0}$ sao cho nếu $\boldsymbol{|x + 3| < \delta}$ thì $\boldsymbol{f(x) > N}$.

Giảng viên: ∞ có thể hiểu là +∞ hoặc -∞

SV_TVT: Vậy $\boldsymbol{N}$ dương thì ký hiệu này là +∞

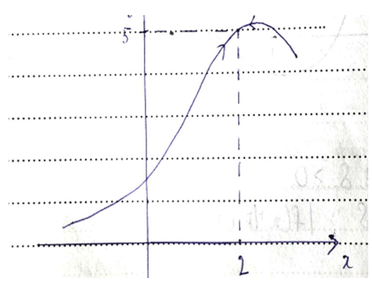
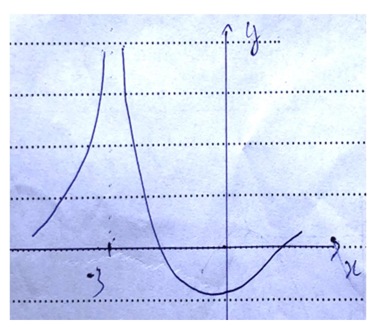
Giảng viên: ∞ thì sao?

SV_NVĐ: $\boldsymbol{|f(x)| > N}$.

Giảng viên: Còn -∞ thì sao?

SV_NVĐ: Tương tự như trường hợp +∞: $\boldsymbol{f(x) < -N}$

4.1.1. Sự hình thành, sử dụng từ ngữ toán học và phương tiện trung gian trực quan

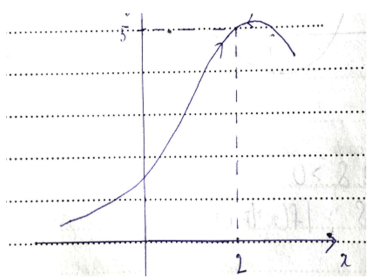
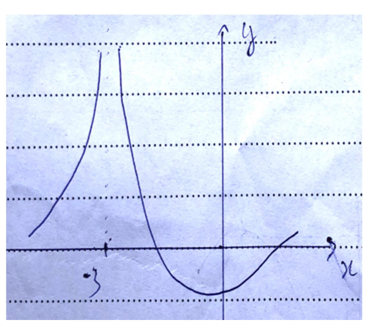
Cách sử dụng từ ngữ	**Phương tiện trung gian trực quan**
- Trong diễn ngôn của hai sinh viên, có sự kết hợp giữa ngôn ngữ toán học và ngôn ngữ thông thường để đề cập các thực thể liên quan. - Nhiều thuật ngữ toán học đã được sử dụng như “đồ thị hàm số”, “liên tục”, “không liên tục”, “dương vô cùng”, “âm vô cùng”, “đường thẳng”, “khoảng”, “lớn hơn”, “nhỏ hơn”, “dần về”. - Trong toàn bộ đoạn hội thoại trên, chúng ta thấy sinh viên đã dùng các thuật ngữ, “nhỏ hơn”, “lớn hơn”, “dần về”, “sao cho”. Các từ ngữ này thể hiện sự tiến triển về nhận thức của họ khi giải quyết vấn đề. - Trong diễn ngôn của các sinh viên này,	➢ Đồ thị hàm số   ➢ Các ký hiệu và biểu tượng toán

quá trình đối tượng hóa, tức quá trình chuyển từ ngôn ngữ chỉ hành động sang ngôn ngữ chỉ đối tượng toán học, được thể hiện rõ trong bài làm và đoạn trích giao tiếp trên. Cụ thể sinh viên đề cập đến hành động và quá trình như “vẽ một chiều”, “vẽ đồ thị qua điểm”.	học được hình thành và sử dụng trong quá trình giao tiếp toán học. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \lvert x-2 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - 5 \rvert < \varepsilon$ $\forall N > 0, \exists \delta >: \lvert x+3 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) \rvert > N$

4.1.2. Sự hình thành thuyết minh xác nhận và thủ tục

Việc sử dụng từ ngữ và các phương tiện hỗ trợ trực quan như là những công cụ để hình thành nên các thuyết minh xác nhận trong quá trình giao tiếp để học toán. Dưới đây là phân tích về mối quan hệ giữa cái biểu đạt, sự thể hiện (của cái biểu đạt), quy trình thực hiện được hình thành và thuyết minh xác nhận dựa trên thảo luận và bài làm của nhóm 1.

Bảng 1. Mối quan hệ giữa cái biểu đạt, sự thể hiện, quy trình thực hiện và thuyết minh xác nhận trong quá trình giao tiếp của Nhóm 1.

Cái biểu đạt	**Sự thể hiện**	**Quy trình thực hiện được hình thành**	**Thuyết minh xác nhận**
Giải thích bằng đồ thị	 	- Vẽ đồ thị như vậy đi qua điểm (5; 2) - Vẽ đồ thị nhận $x = -3$ làm tiệm cận đứng	Đồ thị gồm các nhánh trên

	Từ ngữ nói hoặc viết: *"Vì trong đề không cho hàm số cụ thể nên ta có thể vẽ minh họa đồ thị như vậy đi qua điểm* $(5; 2)$*".* *"Hàm số không xác định tại* $x = -3$ *nên có thể vẽ đồ thị nhận* $x = -3$ *làm tiệm cận đứng".*	Không cho hàm số cụ thể	*"Vẽ minh họa đồ thị như vậy đi qua điểm* $(5; 2)$*".* *"Vẽ đồ thị nhận* $x = -3$ *làm tiệm cận đứng".*

Dựa vào đoạn trích thảo luận và bài làm của sinh viên làm bài toán 1 ở trên, chúng ta thấy rằng các thuyết minh xác nhận được học sinh hình thành và sử dụng một cách tường minh (nói và viết). Đó là sự xác nhận tính đúng trong lập luận diễn dịch của sinh viên liên quan đến các đối tượng toán học (giới hạn, đồ thị hàm số) và mối quan hệ giữa chúng. Qua phân tích mối quan hệ giữa cái biểu đạt, sự thể hiện của cái biểu đạt, quy trình thực hiện (được hình thành bởi sinh viên), và các thuyết minh xác nhận, chúng ta thấy được tư duy toán và sự phát triển tư duy toán của sinh viên khi tham gia vào quá trình giao tiếp gắn với quá trình giải bài toán đặt ra. Sự thể hiện phong phú (bằng biểu tượng, bằng ngôn từ) cái biểu đạt và các quy trình thực hiện được xây dựng cho chúng ta thấy được tính hiệu quả trong giao tiếp toán học của sinh viên làm bài toán 1. Điều này dẫn đến sự hình thành các thuyết minh được xác nhận.

Để xem xét các thủ tục được học sinh hình thành và sử dụng trong quá trình giao tiếp, chúng tôi dựa trên những chỉ dấu của thành phần thủ tục theo tiếp cận giao tiếp-nhận thức. Chúng tôi tập trung vào các chỉ dấu sau: Sinh viên mô tả (tường thuật, thuyết minh) các đối tượng toán học và mối quan hệ *như thế nào*? Các *quy luật* được lặp lại trong diễn ngôn của sinh viên là gì? Sinh viên sử dụng các *quy trình nào* để giải quyết vấn đề? Các thực hành có tính lặp lại trong diễn ngôn hay hành động của sinh viên là gì?

Phân tích trích đoạn thảo luận và bài làm của sinh viên làm bài toán 1, chúng tôi bước đầu xác định được những thủ tục được hình thành và sử dụng bởi các sinh viên nhóm này trong quá trình giao tiếp để giải quyết vấn đề như sau:

Bảng 2. Kiểu thủ tục được hình thành và cách sử dụng của sinh viên làm bài toán 1

Tên thủ tục	Kiểu thủ tục	Minh chứng sử dụng
Hàm số không xác định tại một điểm $x = a$ thì đồ thị hàm số có thể nhận đường thẳng $x = a$ làm tiệm cận	Khám phá (explorations)	*"Ta thấy đồ thị này không liên tục tại* $x = -3$*, ta vẽ đồ thị gồm 2 nhánh nhận* $x = -3$ *làm tiệm cận đứng".*

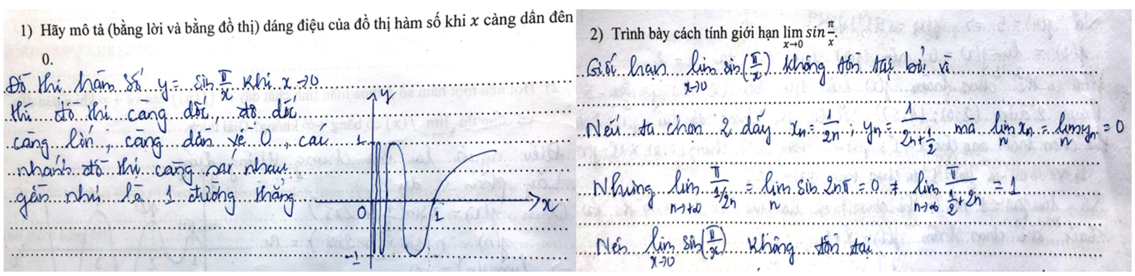
đứng.		
Vẽ đồ thị đi qua một điểm.	Hành vi (deeds)	*"Vì trong đề không cho hàm số cụ thể nên ta có thể vẽ minh họa đồ thị như vậy đi qua điểm* $(5; 2)$*".*
Suy luận tương tự	Nghi thức (Rituals)	*"Tương tự như trường hợp* $+\infty$*:* $f(x) < -N$*".*

4.2. Đặc trưng diễn ngôn toán học của sinh viên khi làm bài toán 2

Nhóm 2 thực nghiệm gồm 2 sinh viên: NHP, TVN. Chúng tôi phân tích đặc trưng diễn ngôn của nhóm sinh viên này qua bài toán dưới đây:

Bài toán 2.

Phần bài làm của sinh viên:


1) Hãy mô tả (bằng lời và bằng đồ thị) dáng điệu của đồ thị hàm số khi x càng dần đến 0.

Đồ thị hàm số $y = \sin\frac{\pi}{x}$ khi $x \to 0$ thì đồ thị càng dốc, độ dốc càng lớn, càng dần về 0, cái nhánh đồ thị càng sát nhau gần như là 1 đường thẳng

2) Trình bày cách tính giới hạn $\lim_{x\to 0} sin\frac{\pi}{x}$.

Giới hạn $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{\pi}{x})$ không tồn tại bởi vì

Nếu ta chọn 2 dãy $x_n = \frac{1}{2n}$; $y_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ mà $\lim_n x_n = \lim_n y_n = 0$

Nhưng $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{1/2n} = \lim_n \sin 2n\pi = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\frac{1}{2}+2n} = 1$

Nên $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{\pi}{x})$ không tồn tại

Phần thảo luận của sinh viên:

SV_NHP: Cho $\boldsymbol{x = 1}$ thì hàm $\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{x} = \sin\pi = 0}$ ta có điểm đi qua $(\boldsymbol{1}; \boldsymbol{0})$.

SV_TVN: Vẽ đồ thị gần hai phía điểm $\boldsymbol{0}$ xem sao?

SV_NHP: Nếu $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ thì ta được $\boldsymbol{\sin 2\pi = 0}$, $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}, \boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$ cũng bằng 0.

SV_TVN: Đồ thị đi qua điểm $(\boldsymbol{-2}; \boldsymbol{0})$.

SV_NHP: Ừ đúng rồi, nếu $\boldsymbol{x = \frac{1}{n}}$ thì $\boldsymbol{\sin x = 0}$.

SV_TVN: Bây giờ ta cho những giá trị khác đi?

SV_NHP: Cho $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$ ta có $\boldsymbol{\sin\frac{3\pi}{2} = -1}$

SV_TVN: Cho các giá trị $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{3}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}}$ xem sao?

SV_NHP: $\boldsymbol{f(\frac{1}{3}), f(\frac{2}{5}), f(\frac{3}{3}), f(\frac{2}{7}), f(\frac{2}{9})}$ lần lượt là $\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1}; \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}; \boldsymbol{0}; \boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1}$.

SV_TVN: Đồ thị giờ sao đây?

SV_NHP: Đồ thị đi qua các điểm trên và xoắn lên xoắn xuống.

SV_TVN: Khi $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ thì đồ thị tăng càng nhanh phải không, thẳng đứng phải không, còn nếu mà lớn hơn 1 thì càng đều?

SV_NHP: Khi $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ thì đồ thị $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{x}}$ càng tăng nhanh theo một đường thẳng đứng?

SV_TVN: Đúng rồi, nó đi lên đi xuống nữa, đồ thị càng dần về 0 giống đường thẳng.

SV_NHP: Khi $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ thì đồ thị càng dốc, là độ dốc càng lớn.

SV_TVN: Khi $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ thì $\boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{x}} \to \infty$, $\boldsymbol{sin}\infty$ thì không tồn tại, $\boldsymbol{sin}\infty$ làm gì có.

SV_NHP: Mình cảm giác $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ thì $\mathbf{lim}_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\, \boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{x}}$ không tồn tại.

SV_TVN: Giới hạn này sẽ không tồn tại vì nếu ta chỉ ra được 2 dãy cùng tiến về 0 nhưng $\boldsymbol{f}$(**hai dãy** đó) khác nhau.

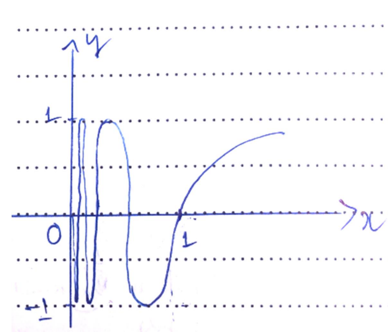
SV_NHP: Ừ, ta chọn dãy $x_n = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ và dãy $y_n = \frac{\mathbf{1}}{?}$?

SV_TVN: Nếu ta chọn dãy $x_n = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ thì $\boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{sinn\pi}$ không bỏ $\boldsymbol{n\pi}$ được nên ta chọn hai dãy đó là $x_n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}$ và dãy $y_n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$.

SV_NHP: Ừ, ta có $\mathbf{lim}_{\boldsymbol{n}\to\infty}\, x_n = \mathbf{lim}_{\boldsymbol{n}\to\infty}\, \mathbf{sin}\, \mathbf{2}\boldsymbol{n\pi} = \mathbf{0} \neq \mathbf{lim}_{\boldsymbol{n}\to\infty}\, y_n = \mathbf{lim}_{\boldsymbol{n}\to\infty} \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \mathbf{1}$.

SV_TVN: Vậy ta kết luận thì $\mathbf{lim}_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\, \boldsymbol{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{x}}$ không tồn tại.

4.2.1. Sự hình thành, sử dụng từ ngữ toán học và phương tiện trung gian trực quan

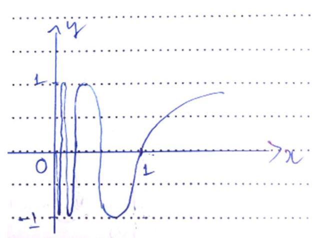
Cách sử dụng từ ngữ	**Phương tiện trung gian trực quan**
- Các thuật ngữ toán học và đặc thù trong toán học được sinh viên sử dụng trong giao tiếp để giải quyết vấn đề là: "hàm số", "đường thẳng", "đồ thị", "dãy số", "giới hạn", "điểm", "không tồn tại", "độ dốc", "dần về", "tăng", "tiến về". Trong đó, các thuật ngữ như "độ dốc", "tăng", "dần về" là những thuật ngữ không có sẵn trong để bài toán. - Các câu văn như "đồ thị càng dần về 0 giống đường thẳng", "Khi $x \to 0$ thì $sin\frac{\pi}{x} \to \infty$" thể hiện hai *quá trình* và *hành động* nhằm hướng đến *đối tượng hoá* thực thể "Tiệm cận đứng". Những câu	- Những phân tích trực quan của học sinh đối với đồ thị hàm số $f(x)$:  • Các ký hiệu và biểu tượng toán học được hình thành và sử dụng trong

văn trong đoạn trích thảo luận và bài làm của sinh viên dần dần định hướng được đối tượng, thể hiện qua việc khẳng định tính chất tăng, giảm và sự tồn tại của hàm số.	quá trình giao tiếp: $\lim_{n\to\infty} x_n \neq \lim_{n\to\infty} y_n \Rightarrow$ giới hạn không tồn tại.

4.2.2. Sự hình thành thuyết minh xác nhận và thủ tục

Dưới đây, chúng tôi phân tích rõ đặc trưng của thuyết minh xác nhận của sinh viên, bằng cách xem xét mối quan hệ giữa cái biểu đạt, sự thể hiện (của cái biểu đạt), quy trình thực hiện được hình thành, và các thuyết minh xác nhận.

Bảng 3. Đặc trưng của thuyết minh xác nhận của nhóm sinh viên.

Cái biểu đạt	**Sự thể hiện**	**Quy trình thựchiện được hình thành**	**Thuyết minh xác nhận**
Đồ thị hàm số	Bằng hình vẽ: 	Tìm các giá trị đặc biệt.	SV_TVN: Cho các giá trị $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{3}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ xem sao? SV_NHP: $f\left(\frac{1}{3}\right), f\left(\frac{2}{5}\right), f\left(\frac{3}{3}\right), f\left(\frac{2}{7}\right), f\left(\frac{2}{9}\right)$ lần lượt là $0; 1; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; -1; 1$.
		Dựa vào tính chất của hàm số	SV_NHP: Khi $x \to 0$ thì đồ thị $y = sin\frac{\pi}{x}$ càng tăng nhanh theo một đường thẳng đứng đúng không? SV_TVN: Đúng rồi, nó đi lên đi xuống nữa, đồ thị càng dần về 0 giống đường thẳng. SV_NHP: Khi $x \to 0$ thì đồ thị càng dốc, là độ dốc càng lớn.

Giới hạn không tồn tại	Bằng ngôn ngữ nói: *"Giới hạn này sẽ không tồn tại vì nếu ta chỉ ra được 2 dãy cùng tiến về 0 nhưng f(hai dãy đó) khác nhau".*	Bằng công thức: ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0 \neq \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n+\frac{1}{2}} = 1$	SV_NHP: Ừ, ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0 \neq \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n+\frac{1}{2}} = 1$. SV_TVN: Vậy ta kết luận thì $\lim_{x\to 0} sin \frac{\pi}{x}$ không tồn tại.

Bảng 4. Kiểu thủ tục được hình thành và cách sử dụng của sinh viên làm bài toán 2

Tên thủ tục	Kiểu thủ tục	Minh chứng sử dụng
Giới hạn này sẽ không tồn tại vì nếu ta chỉ ra được 2 dãy cùng tiến về 0 nhưng f(*hai dãy đó*) khác nhau.	Khám phá (explorations)	Ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0 \neq \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n+\frac{1}{2}} = 1$.
Vẽ đồ thị bằng cách nối các điểm đặc biệt	Hành vi (deeds)	SV_TVN: Cho các giá trị $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{3}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ xem sao? SV_NHP: $f(\frac{1}{3}), f(\frac{2}{5}), f(\frac{3}{3}), f(\frac{2}{7}), f(\frac{2}{9})$ lần lượt là $0; 1; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; -1; 1$.

5. Thảo luận và kết luận

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã đề cập đến việc sử dụng lý thuyết giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) để phân tích đặc trưng giao tiếp toán học của sinh viên trong quá trình học toán. Nghiên cứu cho thấy lý thuyết giao tiếp – nhận thức mang đến một công cụ hiệu quả và có ý nghĩa để khám phá rõ hơn tính đa dạng và phong phú, vai trò của diễn ngôn toán học trong quá trình giao tiếp để học toán và giải quyết vấn đề toán học. Tiếp cận giao tiếp – nhận thức (Sfard, 2008) có thể được sử dụng rộng rãi hơn để xem xét giao tiếp toán học của sinh viên và giáo viên trong dạy học bất kỳ chủ đề toán học nào. Bốn yếu tố đặc trưng của tiếp cận này phù hợp để phân tích và giải thích diễn ngôn về các đối tượng và thực thể toán học. Nghiên cứu của chúng tôi góp phần gợi lên và thúc đẩy vấn đề phát triển giao tiếp trong thực hành dạy học toán giải tích ở đầu đại học.

Những kết quả ban đầu chúng tôi thu nhận được từ nghiên cứu này có thể góp phần vận dụng lý thuyết giao tiếp-nhận thức của Sfard (2008) vào phân tích đặc trưng bản chất của quá trình giao tiếp toán học trong dạy học toán ở Việt Nam. Lý thuyết giao tiếp – nhận thức cho phép chúng tôi hiểu và làm rõ được bản chất của diễn ngôn toán học của học sinh, thấy được mối liên hệ với quá trình tư duy và nhận thức toán của sinh viên khi giải quyết vấn đề. Nghiên cứu cho thấy hiệu quả và ý nghĩa của tiếp cận giao tiếp-nhận thức trong xem xét quá trình dạy học toán từ cách nhìn văn hoá – xã hội đối với việc học. Nghiên cứu này cho thấy lý thuyết giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) là một công cụ hiệu quả để xem xét, đánh giá năng lực giao tiếp toán của học sinh trong một tình huống dạy học toán. Như Cobb et al. (2009) khẳng định, khung lý thuyết giao tiếp – nhận thức của Sfard (2008) có khả năng xem xét được cấp độ vĩ mô của diễn ngôn toán học, cấp độ trung gian của thực hành diễn ngôn phối hợp giữa sinh viên và giáo viên, và cấp độ vi mô của diễn ngôn toán học của sinh viên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Cobb, P., Gresalfi, M., Hodge, L. L. (2009). An interpretive scheme for analyzing the indentities that students develop in mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Eudcation, 40:* 40-68.
2. Guçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82(3)*: 439–453.
3. Guçler, B. (2016). Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3) : 375-393.
4. Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. New York: Cambridge University Press.
5. Nardi, N., Ryve, A., Stadler, E., & Viirman, O. (2014) Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus, *Research in Mathematics Education, 16*(2): 182-198.
6. Hồ Hữu Nghĩa. (2021). Phát triển giao tiếp toán học của học sinh trong giải quyết vấn đề về mối quan hệ giữa đồ thị hàm số và nguyên hàm. *Luận văn thạc sĩ Giáo dục học.* Trường Đại học Sư phạm Huế.
7. Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(3): 395–421.
8. Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics, 89*(2*)*: 233–250.
9. Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

10. Stadler, E. (2011). The same but different – Novice university students solve a textbook exercise. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 2083–2092). Poland: University of Rzeszów and ERME.

11. Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: prologue. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3): 299–306.